ОТ ТЕОРИЯ КЪМ ПРАКТИКА: ИНТЕРПОЛАЦИОНЕН ПОЛИНОМ НА ЛАГРАНЖ С ПРИЛОЖНИ ПРИМЕРИ

Тоня Матева

Настоящата статия разглежда един от фундаменталните методи в числения анализ — интерполационния полином на Лагранж, като акцентът е поставен върху неговото практическо приложение в различни области на науката и техниката. Целта на изследването е не само да се демонстрира техническата страна на метода, но и да се стимулира по-дълбоко разбиране за връзката между теорията и практиката, особено в контекста на подготовката на студенти и млади специалисти.

Интерполацията е широко използван подход за апроксимация на функции и за прогнозиране на стойности в условия на ограничени емпирични данни. В теоретичната част е представен формалният апарат на полинома на Лагранж, както и неговите свойства и ограничения. В практическата част са включени реални примери от икономиката, физиката и биологията, които илюстрират ефективността и приложимостта на метода при решаване на задачи, свързани с прогнозиране, изчисления и моделиране на процеси.

Нека разгледаме следната задача: по дадени стойности на функцията f в $n+1-$ на точки $x_i,\ ,\ i=0,1,\dots n,$ да се намери алгебричен полином P от $n-$та степен, който да има еднакви стойности с функцията f в точките $x_i,\ i=0,1,\dots n$, т.е

$$P(x_i)=f(x_i),\quad i=0,1,\dots n.$$

Това е класическа интерполационна задача. Точките x_i се наричат интерполационни възли. В общия случай, независимо дали точките са равноотдалечени или не, за решаването на тази задача се използва интерполационната формула на Лагранж:

$$L_n(f;x)=\sum_{i=0}^{n} f(x_i)\frac{w_n(x)}{(x-x_i).w_n'(x_i)}\ ,$$

където $w_n(x)=(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n).$

Можем, за удобство, да напишем формулата и така:

$$L_n(f;x)=\sum_{i=0}^{n} f(x_i)\Phi_i(x)$$

$$\Phi_i(x)=\frac{(x-x_0)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n)}{(x_i-x_0)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)}$$

.

Ще разгледаме практичен пример от ежедневието за по-ясно осъзнаване същността и приложението на тази формула.

Задача 1: В метеорологична станция в гр. Добрич са измерени температурите в следните часове на деня:

Час (x)	Температура (°C, y)
6.0	18
9.0	21
12.0	26
15.0	28

Да се изчисли температурата в 10:30 часа, като се използва интерполационният полином на Лагранж.

Решение:

1. Преобразуваме 6.0, 9.0, 12.0, 15.0 в десетична стойност. Това са възлите x_i:

$x_0 = 6, \quad x_1 = 9, \quad x_2 = 12, \quad x_3 = 15$

$y_0 = 18, \quad y_1 = 21, \quad y_2 = 26, \quad y_3 = 28$

2. Прилагаме формулата на Лагранжовия интерполационен полином:

$L_n(f;x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\Phi_i(x)$ при n=3.

$L_3(f;x) = y_0.\Phi_0(x) + y_1.\Phi_1(x) + y_2.\Phi_2(x) + y_3.\Phi_3(x)$, където

$$\Phi_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)}$$

$$\Phi_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)}$$

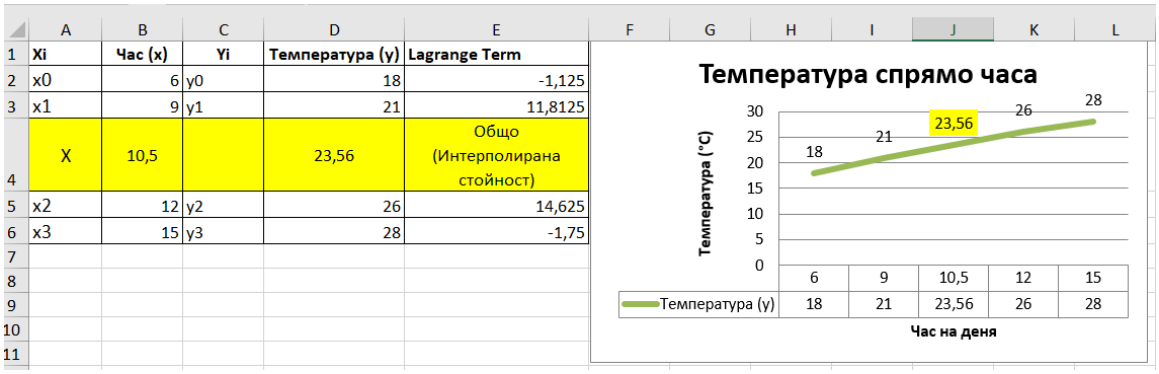
$$\Phi_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)}$$

$$\Phi_3(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)}$$

3. Изчисляваме стойността на полинома за x = 10.5 с дадените точки: (6.0,18), (9.0,21), (12.0,26), (15.0,28)

4. Изчислената стойност чрез полинома на Лагранж е: 23.56 °C.

Изчисленията могат да бъдат извършени ръчно или с помощта на програма Excel. Няма вградена формула за интерполационния полином на Лагранж, но изписването на формулите не е толкова трудоемко и ни спестява доста пресмятания и вероятност за грешки. Визуализацията с диаграма ни дава още по ясна представа за решението на задачата.



	A	B	C	D	E
1	**Xi**	**Час (x)**	**Yi**	**Температура (y)**	**Lagrange Term**
2	x0	6	y0	18	-1,125
3	x1	9	y1	21	11,8125
4	X	10,5		23,56	Общо (Интерполирана стойност)
5	x2	12	y2	26	14,625
6	x3	15	y3	28	-1,75
7					
8					
9					
10					
11					

Задача 2: Разход на гориво на автомобил

Фирма тества нов модел автомобил и измерва разхода на гориво при различни скорости:

Скорост (km/h)	**Разход (l/100 km)**
50	4.8
80	5.5
110	7.2

Да се изчисли приблизителният разход на гориво при скорост **90 km/h**, използвайки интерполационен полином на Лагранж от втора степен.

Практическо приложение: Такива изчисления се използват при прогнози в макроикономически модели и финансово планиране.

Задача 3: Прогноза за инфлация (икономическа насоченост)

В дадена страна е измерена годишната инфлация за определени години:

Година	Инфлация (%)
2020	3.2
2022	5.8
2024	6.4

Да се направи приближена прогноза за инфлацията през 2023 г., използвайки интерполационен полином на Лагранж.

4. Движение на тяло (физика)

Тяло се движи по права линия и са измерени стойности за изминатото разстояние за различни моменти от време:

Време (s)	**Път (m)**
2	4.5
5	18.2
7	30.6

Да се определи приближено изминатото разстояние в момента t=6t = 6t=6 секунди чрез интерполационен полином на Лагранж.

Практическо приложение: В експерименталната физика често се използва интерполация при обработка на резултати, когато не са налични данни за всеки момент.

3. Растеж на бактериална култура (биология)

В лабораторен експеримент се наблюдава броят на бактериите в определени моменти:

Време (часове)	**Брой бактерии ($x10^3$)**
1	2.5
3	7.8
4.5	12.1

Да се изчисли приблизителният брой бактерии след 4 часа чрез интерполационен полином на Лагранж.

Практическо приложение: Интерполацията се използва за прогнозиране на растежа на микробиологични култури или клетки, когато са налични ограничени експериментални данни.

Представените практически примери имат потенциал да засилят познавателния интерес на студентите и същевременно съдействат за по-задълбочено теоретично осмисляне и критично разбиране на същността и приложната стойност на интерполационния полином на Лагранж.“

Заключение

Интерполационният полином на Лагранж е изключително полезен и ефективен инструмент за числена апроксимация и прогнозиране на стойности в случаи, когато са налични ограничен брой емпирични данни. Неговата приложимост се простира отвъд теоретичните рамки на числения анализ, като намира широко място в реални практически задачи от области като икономика, физика, биология и инженерни

науки. Чрез конкретните примери, разгледани в настоящата статия, се подчертава значението на този метод за моделиране на процеси и подпомагане на вземането на информирани решения в условията на несигурност или липса на пълна информация.

Въпреки своите предимства, методът има и ограничения, свързани най-вече с увеличаване на степента на полинома при по-голям брой точки, което може да доведе до нежелани осцилации (т.нар. ефект на Рунге). Поради това е важно да се подхожда внимателно при избора на интерполационна техника в зависимост от конкретния контекст и поставените цели.

В заключение, овладяването и разбирането на интерполационния полином на Лагранж не само обогатява математическата култура на студентите и специалистите, но и предоставя ценен инструментариум за справяне с разнообразни практически предизвикателства в съвременната научна и приложна дейност.

Литература:

1. **Бъртън, Д.** *(2010). Въведение в числения анализ*. София: Класика и Стил.
2. **Burden, R. L., & Faires, J. D.** (2011). *Numerical Analysis* (9th ed.). Boston: Brooks/Cole.
3. **Atkinson, K. E.** (1989). *An Introduction to Numerical Analysis* (2nd ed.). New York: John Wiley & Sons.
4. **Stoer, J., & Bulirsch, R.** (2013). *Introduction to Numerical Analysis* (3rd ed.). New York: Springer.